الـــدالة الأسيـــة للأســـــاس a

تـمـهيـــد :

لتكن $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

نعلم أن الدالة $(x \mapsto \log_a x)$ متصلة ورتيبة قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

إذن : هي تقابـل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

ومنه فهي تقبل دالة عكسية معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+^*$.

تعريـــف :

الدالة العكسية للدالة $(x \mapsto \log_a x)$ تسمى **الدالة الأسيـة للأســاس a**، ونرمز لها بـــ $(x \mapsto \exp_a(x))$.

استنتــاج :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\log_a(x) = y \iff x = \exp_a(y)$$

ملاحظـة :

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \exp_a(x) = a^x$

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^x = e^{x \ln a}$

3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad 1^x = 1$

4) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^x \succ 0$

دراســة الـدالـــة $f(x \mapsto a^x)$

1- مجموعـة التعريــف :

$$D = \mathbb{R} =]-\infty \,,\, +\infty[$$

2- النهـايـــات :

- **الحالـة 1 :** $a \succ 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = 0$$

- **الحالـة 2 :** $0 \prec a \prec 1$

$$\lim_{+\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{-\infty} a^x = +\infty$$

3- التغيـــرات :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^x = e^{x \ln a}$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x$

ومنه إشارة $\left(a^x\right)'$ هـي إشارة $\ln a$.

ملاحظـة :

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \quad \left(a^x\right)'' = \left(\ln a \cdot a^x\right)'$

$$= \ln^2 a \cdot a^x \succ 0$$

- **الحالـة 1 :** $a \succ 1$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

- **الحالـة 2 :** $0 \prec a \prec 1$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\left(a^x\right)'$	$-$
a^x	$+\infty \searrow 0$

تطبيقــات :

أحسب النهايات التاليـــة :

(1

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

نضع : $X = \dfrac{1}{x}$

$$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to 0)$$

إذن : $\lim_{X\to 0} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} = e^1 = e$

(2

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$= e^1 = e$$

(3

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

حدد مشتقــة الدالـة f في الحـالات التاليـة :

R

(1 $f(x) = 4^x$

$$f(x) = e^{x\ln 4}$$

إذن :
$$f'(x) = (\ln 4)\cdot e^{x\ln 4}$$
$$= (\ln 4)\cdot 4^x$$

(2 $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$

$$f(x) = \frac{e^{x\ln 2}}{x}$$

إذن :
$$f'(x) = \frac{(\ln 2)\times 2^x \times x - 2^x}{x^2}$$
$$= \frac{(x\ln 2 - 1)\,2^x}{x^2}$$

(3 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

$$f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

إذن :
$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)'\cdot e^{\frac{\ln x}{x}}$$
$$= \frac{1-\ln x}{x^2}\cdot e^{\frac{\ln x}{x}}$$

(4 $f(x) = 3^{1-x}$

لدينا :
$$f(x) = e^{(1-x)\ln 3}$$

إذن :
$$f'(x) = \big((1-x)\cdot\ln 3\big)'\cdot 3^{1-x}$$
$$= -\ln 3\cdot 3^{1-x}$$

(5 $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

لدينا :
$$f(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

إذن :
$$f'(x) = \left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'\cdot e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
$$= \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x}{x}}\right)\cdot e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
$$f'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)\cdot e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$